0.1 Model structure on category of small categories

small category を object とし、functor を morphism とした category を **smcat** と書くことにする。

Definition 0.1.1

smcat における morphism である $F: C \longrightarrow D$ が

1. weak quivalence とは equivalence of category
2. cofinration とは $F: \mathrm{ob}(C) \longrightarrow \mathrm{ob}(D)$ が単射
3. fibration とは任意の $c \in C$ と D の isomorphism である $h: F(c) \longrightarrow d$ に対し、C の isomorphism である $g: c \longrightarrow c'$ が存在し、$F(g) = h$ を満たす。

Lemma 0.1.2

$F: C \longrightarrow D$ が fibration であることと、$0: \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{I}$ に対し RLP を持つことは同値である。ただし、$\mathbf{0}$ は object が一つで恒等射以外の morphism がないとし、 $\mathbf{I}$ は object が２つでそれぞれの恒等射と、その間に isomorphism が一つしかないような（合計４本しかない）small category とする。

proof)　　便宜上 $\mathrm{ob}(\mathbf{0}) = \{0\}$, $\mathrm{ob}(\mathbf{I}) = \{0, 1\}$, $\mathrm{Hom}(0, 1) = \{f\}$, $0(0) = 0$ としておく。$F: C \longrightarrow D$ を fibration としたとき、

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "0"'] & C \arrow[d, "F"] \\ \mathbf{I} \arrow[r, "\beta"'] & D \end{tikzcd}$$

の図式が可換とする。このとき、$\beta(f): \beta(0) = F\alpha(0) \xrightarrow{\cong} \beta(1)$ に対し、fibration の定義から、$g: \alpha(*) \xrightarrow{\cong} c'$ が存在し、$F(g) = \beta(f)$ である。よって、

$$H: \mathbf{I} \longrightarrow C$$

を $H(0) = \alpha(0)$, $H(1) = c'$, $H(f) = g$ で定義すれば、図式を可換にする。

逆を示す。任意の $c \in C$ と D の iso である $h: F(c) \longrightarrow d$ を取る。

$$\beta: \mathbf{I} \longrightarrow D$$

を $\beta(0) = F(c)$, $\beta(1) = d$, $\beta(f) = h$ で定義する。

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "0"'] & C \arrow[d, "F"] \\ \mathbf{I} \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dotted, "H"] & D \end{tikzcd}$$

は可換なので、図式を可換にする $H : \mathbf{I} \longrightarrow C$ が得られる。$H(f) : H(0) = c \xrightarrow{\cong} H(1)$ を考えれば、$FH(f) = \beta(f) = h$ である。

□

Definition 0.1.3

$F : C \longrightarrow D$ が essentially surjective とは、任意の $d \in D$ に対し、$c \in C$ と D の isomorphism である $F(c) \xrightarrow{\cong} d$ が存在することである。

Lemma 0.1.4

$F : C \longrightarrow D$ が weak equivalence であることと、F が essentially surjective かつ fully faithful であることは同値である。

proof) $\Longrightarrow$ は簡単である。逆を示すと、

$$G : D \longrightarrow C$$

は $d \in D$ に対し、$c \in C$ と D の isomorphism である $F(c) \xrightarrow{\cong} d$ が存在するため、このような c を選んで $G(d) = c$ と定義し、

$$G : \mathrm{Hom}(d, d') \longrightarrow \mathrm{Hom}(G(d), G(d'))$$

は

$$\mathrm{Hom}(d, d') \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(F(c), F(c')) \xrightarrow{F^{-1}} \mathrm{Hom}(c, c') = \mathrm{Hom}(G(d), G(d'))$$

により定義する。ただし、最初の同型対応は、

$$f : d \longrightarrow d' \mapsto F(c) \xrightarrow{\cong} d \xrightarrow{f} d' \xrightarrow{\cong} F(c')$$

である。$F(x) \in D$ に対し、$GF(x) \in C$ を考えれば natural isomorphism の $FGF(x) \xrightarrow{\cong} F(x)$ があり、これより、$\alpha_X : G \circ F(x) \xrightarrow{\cong} x$ が得られる。また、$F \circ G \cong 1$ は仮定から明らかで、natural も定義に従って確かめられる。

□

Lemma 0.1.5

$F : C \longrightarrow D$ が

1. acyclic cofibration であることと、$F' : D \longrightarrow C$ が存在し、$F' \circ F = 1_C$, $F \circ F' \overset{\alpha}{\cong} 1_D$, $\alpha_{F(C)} = 1$ を満たすのは同値。

2. acyclic fibration であることと、$F : \mathrm{ob}(C) \longrightarrow \mathrm{ob}(D)$ が全射かつ fully faithfull であることは同値。

proof) まず 1) から示す。F を acyclic cofibration とすると、equivalence であることからその inverce を $G : D \longrightarrow C$ とする。

$$F' : D \longrightarrow C$$

を

$$F'(X) = \begin{cases} FF'(X) = X & X \in F(C) \\ G(X) & X \in F(C)^c \end{cases}$$

により定義し、$F' : \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F'X, F'Y)$ は、

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}(FF'X, FF'Y) \xrightarrow{F^{-1}} \mathrm{Hom}(F'X, F'Y) & X, Y \in F(C) \\ \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\beta^* {\beta_*}^{-1}} \mathrm{Hom}(FGX, FGY) \xrightarrow{F^{-1}} \mathrm{Hom}(F'X, F'Y) & X, Y \in F(C)^c \\ \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{{\beta_*}^{-1}} \mathrm{Hom}(FF'X, FGY) \xrightarrow{F^{-1}} \mathrm{Hom}(F'X, F'Y) & X \in F(C), Y \in F(C)^c \end{cases}$$

により定義すれば functor となり、

$$\alpha_X : FF'X \longrightarrow X = \begin{cases} 1 & X \in F(C) \\ \beta_X & X \in F(C)^c \end{cases}$$

と定義すれば natural isomorphism である。逆は equivalence であることは明らかで、

$$F : \mathrm{ob}(C) \longrightarrow \mathrm{ob}(D)$$

を考えると、$x, y \in \mathrm{ob}(C)$ に対し $F(x) = F(y)$ とすると、$x = F'F(x) = F'F(y) = y$ より単射である。

続いて 2) を示す。F を acyclic fibration とする。F の inverce を $G : D \longrightarrow C$ とする。$F : \mathrm{ob}(C) \longrightarrow \mathrm{ob}(D)$ に対し、$d \in \mathrm{ob}(D)$ を取ると、$f : FG(d) \xrightarrow{\cong} d$ が存在するので、$g : G(d) \longrightarrow c$ という isomorphism が存在し、$F(g) = f$ であるため、$F(c) = d$ である。fully faithful であるのは equivalence から示される。

逆を示す。任意の $c \in C$ と isomorphism である $f : F(c) \longrightarrow d$ をとると、$F : \mathrm{ob}(C) \longrightarrow \mathrm{ob}(D)$ が全射であるため、$c' \in C$ が存在し、$F(c') = d$ である。よって、$f : F(c) \longrightarrow F(c')$ であるが $F^{-1}(f) : c \longrightarrow c'$ が isomorphism であるので fibration である。あとは equivalence であるが、Lemma 0.1.4 を考えれば、fully faithful なのは仮定から、あとは essentially surjective であるが、任意の $d \in D$ に対し、$F(c) = d$ となる c が存在するため、恒等射 $F(c) \xrightarrow{=} d$ は isomorphism である。

□

Lemma 0.1.6

$\mathbf{0} = \{0\}$, $\mathbf{1} = \{0 \longrightarrow 1\}$, $\mathbf{2} = \{0, 1\}$, $\mathbf{3} = \{0 \rightrightarrows 1\}$ とおく。$F : C \longrightarrow D$ が acyclic fibration であることと、$\phi \longrightarrow \mathbf{0}$, $\mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{1}$, $\mathbf{3} \longrightarrow \mathbf{1}$ に対し RLP を持つことは同値である。

proof)　　F を acyclic fibration とする。このとき、

$$
\begin{tikzcd}
\phi \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, "F"] \\
\mathbf{0} \arrow[r] & D
\end{tikzcd}
$$

が lift を持つことは、$F : \mathrm{ob}(C) \longrightarrow \mathrm{ob}(D)$ が全射であることから成り立つ。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{2} = \{0, 1\} \arrow[r, "U"] \arrow[d] & C \arrow[d, "F"] \\
\mathbf{1} = \{0 \xrightarrow{f} 1\} \arrow[r, "V"'] & D
\end{tikzcd}
$$

の可換図式においては、$H : \mathbf{1} \longrightarrow C$ を $H(0) = U(0), H(1) = U(1)$ で $V(f) = V(0) = FU(0) \longrightarrow FU(1) = V(1) \in \mathrm{Hom}(FU(0), FU(1)) \cong \mathrm{Hom}(U(0), U(1))$ であるため、

$H(f)$ はこの image により定義すれば図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{3} = \{0 \rightrightarrows^{f}_{g} 1\} \arrow[r, "U"] \arrow[d] & C \arrow[d, "F"] \\
\mathbf{1} = \{0 \xrightarrow{h} 1\} \arrow[r, "V"'] & D
\end{tikzcd}$$

の可換図に対し、$H : \mathbf{1} \longrightarrow C$ を $H(0) = U(0), H(1) = U(1), H(h) = U(f)$ により定義すると、$FU(f) = V(h) = FU(g)$ より、$U(f) = U(g)$ であるので図式を可換にする。

逆に、F が $\phi \longrightarrow \mathbf{0}$, $\mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{1}$, $\mathbf{3} \longrightarrow \mathbf{1}$ に対し RLP を持つとする。$\phi \longrightarrow \mathbf{0}$ が RLP を持つことから、$F : \mathrm{ob}(C) \longrightarrow \mathrm{ob}(D)$ が全射であることがわかる。また、$F : \mathrm{Hom}_C(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(FX, FY)$ に関して、任意の $f \in \mathrm{Hom}_D(FX, FY)$ に関して、

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{2} \arrow[r, "{(X,Y)}"] \arrow[d] & C \arrow[d, "F"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "{(FX \xrightarrow{f} FY)}"'] \arrow[ur, dotted, "H"] & D
\end{tikzcd}$$

であるから、$g = H(0 \longrightarrow 1) : X \longrightarrow Y$ を考えれば、$F(g) = f$ であるから全射。今度は、$f, f' \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ に関して、$F(f) = F(f')$ とする。今度は、

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{3} \arrow[r, "{(X \rightrightarrows^{f}_{f'} Y)}"] \arrow[d] & C \arrow[d, "F"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "{(FX \xrightarrow{F(f)} FY)}"'] \arrow[ur, dotted, "H"] & D
\end{tikzcd}$$

であるから、$f = H(0 \longrightarrow 1) = f'$ なので単射である。

□

Remmark 0.1.7

cofibration は

$$I = \{\phi \longrightarrow \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{1}\ ,\ \mathbf{3} \longrightarrow \mathbf{1}\}$$

で生成され、acyclic cofibration は

$$J = \{\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{I}\}$$

で生成されている。

proof)　　cofibration は object 対応において単射であった。よって、値域の object の方が多いわけで ϕ を定義域上の恒等射に貼り付けることにより、値域の object を増やせて、あとは morphism の増減については言及されないので、$\mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{1}$, $\mathbf{3} \longrightarrow \mathbf{1}$ により、morphism の増減を操作できる。

acyclic cofibration は deformation retract のような状況になっているので、定義域上の恒等射に $\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{I}$ を貼り付けることにより、object を増やせ、しかも $\{0\}$ につぶすことができる。

□

Theorem 0.1.8

Def 0.1.1 により、**smcat** は model category となる。

proof)　　bicomplete は small category であるのよい。2-out-of-3 は簡単に示せ、retract は weak equivalence、cofibration について単純であり、fibration に関しても Lemma 0.1.2 により lift propaty として考えれば示せる。

$$I = \{\phi \longrightarrow \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{1}\ ,\ \mathbf{3} \longrightarrow \mathbf{1}\}$$

$$J = \{\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{I}\}$$

で定義すれば、これは Lemma 0.1.6 , 0.1.2、及び Remmark 0.1.7 により generating (acyclic)cofibrations である。これを用いれば、lift と factorization が示せる。

□